

Aufgabe 22 (Votier) Erzwungene Schwingung und Resonanz

10 Punkte

In Aufgabe 21 haben Sie den eindimensionalen gedämpften harmonischen Oszillator kennengelernt. Die Differenzialgleichung lautete:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Nun werde das System durch eine äußere Kraft $F_a(t) = F_0 \cos(\omega_a t)$ angetrieben. Die Bewegungsgleichung ergibt sich damit zu:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_a t). \quad (1)$$

Nach dem Einschwingvorgang schwingt das angeregte System mit der von außen vorgegebenen Frequenz ω_a , d.h.

$$x(t) = X(\omega_a) \cos(\omega_a t + \phi(\omega_a)) \quad (2)$$

stellt eine Lösung dar.

- (a) Ermitteln Sie $X(\omega_a)$ und $\phi(\omega_a)$. (6 Punkte)

Hinweise: Setzen Sie den Ansatz (2) in Gleichung (1) ein. Benutzen Sie Additionstheoreme für $\cos(\omega_a t + \phi)$ und $\sin(\omega_a t + \phi)$. Wieso müssen die Koeffizienten vor $\cos(\omega_a t)$ und $\sin(\omega_a t)$ verschwinden? Mit Hilfe der Bedingung, dass der Koeffizient vor $\sin(\omega_a t)$ verschwinden muss, können Sie $\tan \phi$ bestimmen. Benutzen Sie

$$L(\omega_a) = \sqrt{(2\gamma\omega_a)^2 + (\omega^2 - \omega_a^2)^2},$$

um damit $\sin \phi$ und $\cos \phi$ anzugeben.

Endergebnis:

$$X(\omega_a) = \frac{F_0}{L(\omega_a) m},$$

$$\phi(\omega_a) = \arctan\left(\frac{-2\gamma\omega_a}{\omega^2 - \omega_a^2}\right).$$

- (b) Wie hängt die Amplitude X von der Frequenz ω_a ab? Was geschieht, wenn bei verschwindender Dämpfung die von außen vorgegebene Frequenz mit ω übereinstimmt? Skizzieren Sie $X(\omega_a)$. (2 Punkte)
- (c) Wie hängt die Phasenverschiebung von der Frequenz ω_a ab? Skizzieren und interpretieren Sie $\phi(\omega_a)$. (2 Punkte)

Aufgabe 23 (Schriftlich) Der Apfel des Isaac Newton**12 Punkte**

- (a) Gegeben sei ein Teilchen der Masse m , dessen Bewegung sich durch die Gleichung

$$m\ddot{x}(t) = -mg$$

beschreiben lässt ($g=\text{konst.}$). Welches physikalische System wird hierdurch wiedergegeben? Welche Bahnkurve erwarten Sie? Ist der Ansatz einer Exponentialfunktion gerechtfertigt? Berechnen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ dieser Differenzialgleichung. Wie lautet die homogene Lösung? Welcher physikalischen Realisierung entspricht diese?

(4 Punkte)

- (b) Im Falle einer geschwindigkeitsabhängigen Reibung verändere sich die Gleichung folgendermaßen:

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) = -mg$$

($\gamma=\text{konst.}$). Betrachten Sie die Differenzialgleichung für $v = \dot{x}(t)$. Berechnen Sie eine Lösung für den homogenen Fall und ermitteln Sie dann eine Partikulärlösung. Wie lautet damit die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung?

(4 Punkte)

- (c) Bestimmen Sie die freien Konstanten für die Anfangsbedingungen $x(0) = h_0$ und $\dot{x}(0) = 0$ für die Resultate aus (a) und (b). Existiert eine maximal erreichbare Geschwindigkeit?

(4 Punkte)

Aufgabe 24 (Votier) Lineare Differenzialgleichung höherer Ordnung 4 Punkte

Bestimmen Sie die allgemeine komplexe Lösung der Differenzialgleichung

$$u''' - u'' + 2u = 0.$$

Benutzen Sie einen Exponentialansatz. Was liefert ein Potenzreihenansatz?

Aufgabe 25 (Votier) δ -Funktion**6 Punkte**

- (a) Skizzieren Sie die Funktionen

$$f_1(x) = \frac{\epsilon/\pi}{x^2 + \epsilon^2}, \quad f_2(x) = \frac{\sin(x/\epsilon)}{\pi x}, \quad f_3(x) = \frac{\Theta(x + \epsilon) - \Theta(x)}{\epsilon}$$

und begründen Sie, warum es plausibel erscheint, dass diese für $\epsilon \rightarrow 0$ (wobei $\epsilon > 0$) gegen die δ -Funktion konvergieren. Für $\Theta(x)$ gilt

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases} \quad (3 \text{ Punkte})$$

- (b) Berechnen Sie explizit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) dx, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Welche Werte erwarten Sie?

(3 Punkte)

Hinweis: $\int_0^{\infty} \sin(x)/x dx = \pi/2$.