

Flächenintegrale

Eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ können wir darstellen mit Hilfe von 2 Parametern

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

Bsp: Eine Ebene aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch den Punkt $\vec{r}_0$ hat die Form

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_0 + u \vec{a} + v \vec{b}$$

• Eine Kugel mit Radius R

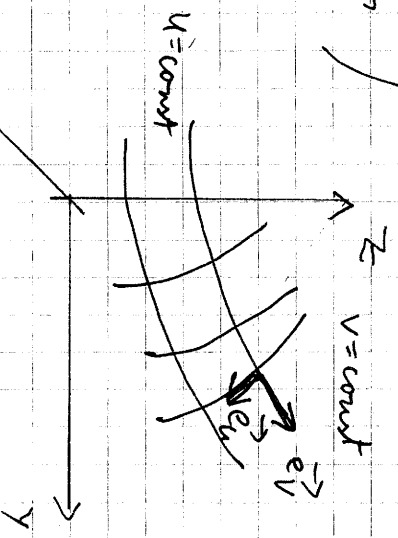
$$\vec{r}(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Die Vektoren

$$\vec{e}_u = \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v)$$

$$\vec{e}_v = \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v)$$

beschreiben die Tangenten $\vec{x}$ an die Linien auf der Fläche mit $v = \text{const}$ und $u = \text{const}$.



Das Flächendifferential dA in einem Punkt hat somit die Form:

$$dA = \underbrace{|\vec{e}_u(u,v) \times \vec{e}_v(u,v)|}_{dA/dudv} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right| du dv$$

Somit ist der Flächeninhalt einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

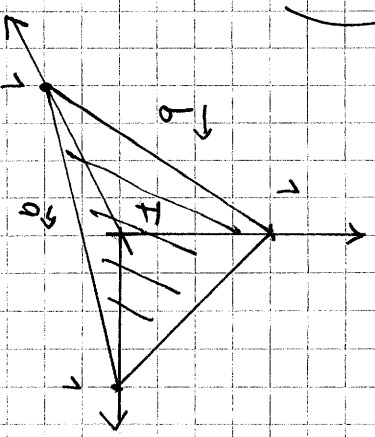
$$F_B = \iint_B du dv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right|$$

Bsp: Darstellung der Fläche

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ +1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}$$



$$F_B = \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \sqrt{3} = \int_0^1 dv \sqrt{3} (1-v) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Dreieck } (u,v) = ((0,0), (1,0), (0,1))$$

$$\text{Hintere Grenze } u+v=1 \Rightarrow u=1-v^*$$

Bei einem Oberflächenintegral wird nun jeder Punkt auf der Oberfläche mit einer Funktion gewichtet:

$$\int_S \phi(\vec{r}) \cdot \int_B du dv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$$

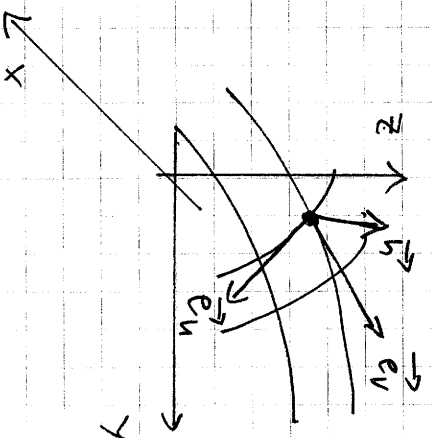
skalares Integral

Es ist jedoch auch möglich, vektorielle Oberflächenintegrale zu definieren. Insbesondere ist das Flächenelement

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv = \vec{n} dA$$

eine Vektorgröße, wobei der Einheitsvektor $\vec{n}$ senkrecht auf der Oberfläche steht.

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}$$



Die Richtung von $\vec{n}$ hängt von der Orientierung der Oberfläche ab. Bei geschlossenen Flächen, wie z.B. die Kugel wird die Orientierung normalerweise so gewählt, dass $\vec{n}$ nach außen zeigt.