

oder

$$c(x) = \int b(x) e^{-A(x)} dx \tag{5.9c}$$

oder

$$y_p(x) \stackrel{(5.9a)}{\underset{(5.9c)}{=}} e^{A(x)} \int b(x) e^{-A(x)} dx \tag{5.9d}$$

$y_p(x)$ ist *eine* spezielle (*partikuläre*) Lösung von (5.4). Wir können auf diese jede Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL (5.7a) addieren, denn

$$\begin{aligned} (y_h(x) + y_p(x))' &= y_h'(x) + y_p'(x) \\ &= \underbrace{a(x) y_h(x)}_{\stackrel{(5.7a)}{=} y_h'(x)} + \underbrace{a(x) y_p(x) + b(x)}_{\stackrel{(5.4)}{=} y_p'(x)} = a(x) (y_h(x) + y_p(x)) + b(x) \end{aligned}$$

Also lautet die allgemeine Lösung von (5.4):

$$y(x) \stackrel{(5.7b)}{\underset{(5.9d)}{=}} c e^{A(x)} + e^{A(x)} \int b(x) e^{-A(x)} dx \tag{5.9e}$$

Beispiel:

$$y'(x) = \underbrace{-2x}_{a(x)} y(x) + \underbrace{4x}_{b(x)}$$

daraus folgt: $A(x) = -x^2$

$$y_h(x) = c e^{-x^2}$$

$$y_p(x) = e^{-x^2} \int \underbrace{4x e^{x^2}}_{2 e^{x^2}} dx = 2$$

Lösung: $y(x) = 2 + c e^{-x^2}$

5.3.2 Nichtlineare DGL 1. Ordnung

Nichtlineare DGL 1. Ordnung sind von der Form $y'(x) = F(x, y)$ mit beliebig kompliziertem F . Im Allgemeinen existiert keine geschlossene Lösung. Ein allgemeingültiges Lösungsverfahren gibt es also nur in Spezialfällen, welche wir im Folgenden behandeln werden.

a) Separable Gleichungen

$$\text{Form: } y'(x) = f(x) g(y) \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Umformen: } \frac{dy}{dx} &= f(x) g(y) \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x) dx \end{aligned} \quad (5.12)$$

Seien die Stammfunktionen:

$$\tilde{G}(y) = \int \frac{dy}{g(y)} \quad (5.13a)$$

und

$$F(x) = \int f(x) dx \quad (5.13b)$$

bekannt. Dann lautet die Lösung zu (5.11):

$$y(x) = \tilde{G}^{-1}(F(x) + c) \quad (5.13c)$$

Für diese Darstellung muss \tilde{G} umkehrbar sein.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \underbrace{y'(x)}_{= \frac{dy}{dx}} &= x + xy^2 = \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{(1 + y^2)}_{g(y)} \\ \int \frac{dy}{1 + y^2} &= \int x dx \\ \arctan(y) &= \frac{1}{2}x^2 + c \\ y(x) &= \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right) \end{aligned}$$

b) Geschickte Substitution

Gelegentlich lässt sich eine DGL durch eine günstige *Substitution* auf eine bekannte, lösbare Form bringen.

Beispiel: Bernoulli-DGL

$$y' = a(x) y + b(x) y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, 1 \quad (5.14)$$

Substitution:

$$z(x) = (y(x))^{1-\alpha} \quad (5.15a)$$

$$z'(x) = (1 - \alpha) (y(x))^{-\alpha} y'(x)$$

oder

$$y'(x)^{-\alpha} y'(x) = \frac{1}{1 - \alpha} z'(x) \quad (5.15b)$$

Multiplikation von (5.14) mit $y^{-\alpha}$.

$$\underbrace{y'(x) (y(x))^{-\alpha}}_{\substack{(5.15b) \\ \frac{z'(x)}{1-\alpha}}} = a(x) \underbrace{(y(x))^{1-\alpha}}_{\substack{(5.15a) \\ z(x)}} + b(x) \quad (5.15c)$$

$$z'(x) = (1 - \alpha) (a(x) z(x) + b(x)) \quad (5.15d)$$

Auf diesem Weg können wir eine DGL der Bernoulli-Form (5.14) immer zu einer linearen DGL umformen, die mit den Methoden des vorherigen Abschnitts lösbar ist.

5.4 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Allgemeine Form:

$$\sum_{i=1}^N a_i(x) y^{(i)}(x) = b(x) \quad (5.16)$$

5.4.1 Eigenschaften der Lösungen

Aus der Form (5.16) erkennt man, dass wenn die $y_i(x)$ mit $i = 1, \dots, n$ Lösungen der homogenen DGL zu (5.16) mit $b(x) = 0$ sind, so auch

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x), \quad c_i \in \mathbb{C} \quad (5.17)$$

Sind die $y_i(x)$ alle unabhängigen Lösungen von (5.16), heißt $y_h(x)$ *allgemeine Lösung* der homogenen DGL.

Ist für $b(x) \neq 0$ (inhomogene DGL) $y_p(x)$ eine partikuläre Lösung der DGL, so löst auch

$$y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) \stackrel{(5.17)}{=} \sum_i c_i y_i(x) + y_p(x) \quad (5.18)$$

die DGL (5.16).

Haben wir eine DGL von der Form (5.16), müssen wir also $y_h(x)$ und $y_p(x)$ bestimmen, um ihre Lösungen zu erhalten.

Mit nicht konstanten Koeffizienten $a(x)$ kann es beliebig kompliziert werden. Daher beschränken wir uns auf konstante Koeffizienten.

5.4.2 Konstante Koeffizienten

Form:

$$\sum_{i=1}^N \underbrace{a_i}_{\text{Hängen nicht von } x \text{ ab.}} y^{(i)}(x) = b(x) \quad (5.19)$$

Vorgehen in Schritten:

- (i) Bestimme $y_h(x)$
- (ii) Bestimme ein $y_p(x)$
- (iii) Die gesuchte Lösung ist (5.18)

a) homogene DGL

Das heißt (5.19) mit $b(x) = 0$:

$$\sum_{i=1}^N a_i y^{(i)}(x) = 0 \tag{5.20}$$

Es gibt eine Standardmethode, die prinzipiell immer funktioniert.

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

Einsetzen in (5.20):

$$\sum_{i=1}^N a_i \lambda^i e^{\lambda x} = 0$$

$e^{\lambda x} \neq 0$, daher Division erlaubt:

$$\sum_{i=1}^N a_i \lambda^i = a_N \lambda^N + a_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{5.21}$$

Das Problem reduziert sich also auf die Lösung des Polynoms (5.21). Es heißt *charakteristisches Polynom*. Auf diesem Weg erhalten wir alle N unabhängigen Lösungen von (5.20). Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (i) Falls alle N Lösungen von (5.21) verschieden sind, sind bereits alle $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$ linear unabhängig und die allgemeine Lösung hat die Form

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i x}, \quad c_i \in \mathbb{C}. \tag{5.22}$$

- (ii) Es gibt mehrfache Nullstellen des Polynoms, das heißt einige λ_i haben den gleichen Wert und die zugehörigen Lösungen $e^{\lambda_i x}$ sind nicht unabhängig.

In diesem Fall gilt:

Ist λ_i k_i -fache Nullstelle, dann lautet die Lösung:

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^{k_i-1} c_{i,j} x^j \right) e^{\lambda_i x}, \quad c_{i,j} \in \mathbb{R} \tag{5.23}$$

M ist die Zahl der unabhängigen (verschiedenen) Nullstellen von (5.21).

Beispiel:

$$y^{(6)}(x) - 10y^{(5)}(x) + 40y^{(4)}(x) - 82y^{(3)}(x) + 91y''(x) - 52y'(x) + 12y(x) = 0$$

charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} \lambda^6 - 10\lambda^5 + 40\lambda^4 - 82\lambda^3 + 91\lambda^2 - 52\lambda + 12 &= 0 \\ &= (\lambda_3 - 3)(\lambda_2 - 2)^2(\lambda_1 - 1)^3 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1$ ist dreifache Nullstelle

$\lambda_2 = 2$ ist doppelte Nullstelle

$\lambda_3 = 3$ ist einfache Nullstelle

Lösung:

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x + (c_4 + c_5 x) e^{2x} + c_6 e^{3x}$$

Besonderheit bei reellen Koeffizienten:

Sind *alle* Koeffizienten a_i der DGL (5.20) reell und gibt es komplexe Lösungen $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$ des charakteristischen Polynoms (5.21), dann ist auch die konjugiert-komplexe Zahl $\bar{\lambda}_i = \alpha_i - i\beta_i$ eine Lösung:

$$\sum_{j=0}^N a_j \bar{\lambda}_i^j = 0$$

Diese beiden Lösungen lassen sich dann schreiben als

$$\begin{aligned} &c_i e^{\lambda_i x} + \tilde{c}_i e^{\bar{\lambda}_i x} \\ &= c_i e^{\alpha_i x + i\beta_i x} + \tilde{c}_i e^{\alpha_i x - i\beta_i x} \\ &= e^{\alpha_i x} \left(c_i e^{i\beta_i x} + \tilde{c}_i e^{-i\beta_i x} \right) \\ &= e^{\alpha_i x} A \cos(\beta_i x + \varphi) \\ &= e^{\alpha_i x} A \sin(\beta_i x + \tilde{\varphi}) \end{aligned} \tag{5.24a}$$

Das heißt, die Lösungen können durch $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ausgedrückt werden. Diese sind unabhängig.

Äquivalent zu (5.24a) ist:

$$y_h(x) = \dots + e^{\alpha_i x} (A \cos(\beta_i x) + B \sin(\beta_i x)) \tag{5.24b}$$

b) inhomogene DGL

Wenn für die DGL (5.16) die Lösung der zugehörigen homogenen DGL der Form (5.20) bekannt ist, reicht es *eine* partikuläre Lösung von (5.16) zu kennen. Es gibt kein allgemeines Verfahren diese partikuläre Lösung zu bestimmen. Vielfach sind die Ausdrücke $b(x)$ aber so einfach, dass leicht eine Lösung, oder zumindest ein Ansatz, erraten werden kann.

Immer einen Versuch wert sind:

(i) für $b(x) = B e^{\alpha x}$

$$\text{Ansatz: } \mathcal{Y}_p(x) = A e^{\alpha x} \quad (5.25a)$$

(ii) für $b(x) = B_1 \cos(\alpha x) + B_2 \sin(\alpha x)$

$$\text{Ansatz: } \mathcal{Y}_p(x) = A_1 \cos(\alpha x) + A_2 \sin(\alpha x) \quad (5.25b)$$

(iii) für $b(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n$

$$\text{Ansatz: } \mathcal{Y}_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n \quad (5.25c)$$

- (iv) Ist $b(x)$ eine Summe oder ein Produkt der Formen **i**, **ii** oder **iii**, kann man für den Ansatz eine Summe oder ein Produkt der gleichen Form versuchen.
- (v) Kommt einer der Terme aus **i**, **ii**, **iii** und **iv** bereits in der homogenen Lösung $\mathcal{Y}_h(x)$ vor, kann man versuchen, im Ansatz den entsprechen Term mit der kleinsten Potenz von x zu multiplizieren, sodass der Term sich von allen homogenen Lösungen unterscheidet.

Beispiel:

$$b(x) = e^{2x}, \quad \mathcal{Y}_h(x) = a e^{2x} + b e^{-3x}$$

$$\mathcal{Y}_p(x) = B x e^{2x}$$

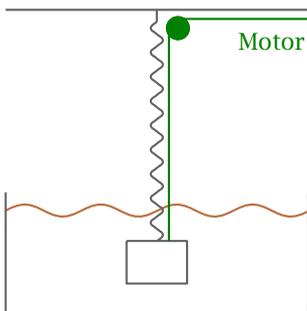
c) Beispiele

DGL eines getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillators:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) \quad (5.27)$$

Wo kommt das in der Physik vor?

Beispiel: Federpendel im Ölbad.



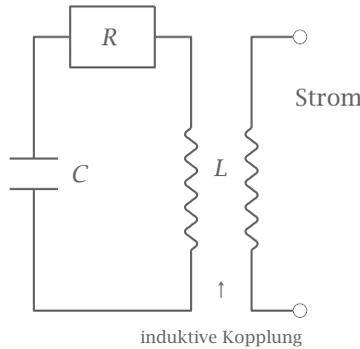
Öl: geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft

$$F_R = -\tilde{\gamma}v$$

Dann lauten die Konstanten für (5.27):

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\tilde{\gamma}}{2m} \\ f &= \frac{F(t)}{m} && \text{(Kraft des Motors)} \\ \omega_0^2 &= \frac{D}{m} && D = \text{Federkonstante} \end{aligned}$$

Beispiel: Elektrischer Schwingkreis



$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = I_{\text{err}}(t)$$

$$\ddot{I} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\gamma} \dot{I} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} I = \underbrace{\frac{I_{\text{err}}(t)}{L}}_{f(t)}$$

Lösung der homogenen DGL für $\gamma < \omega_0$ (s. Übungen):

$$x_h(t) = e^{-\gamma t} (a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t}) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (5.28)$$

Beispiel für eine äußere Anregung:

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

$$\text{Ansatz: } x_p(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \quad (5.29a)$$

Ableiten und Einsetzen in (5.27):

$$-a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - b\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) - 2\gamma a\omega_0 \sin(\omega_0 t) + 2\gamma b\omega_0 \cos(\omega_0 t) + a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + b\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \stackrel{!}{=} A \cos(\omega_0 t)$$

$$-2\gamma a\omega_0 \sin(\omega_0 t) + 2\gamma b\omega_0 \cos(\omega_0 t) \stackrel{!}{=} A \cos(\omega_0 t) \quad (5.29b)$$

Koeffizientenvergleich

$$\cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} 2\gamma\omega_0 b &= A \\ \rightarrow b &= \frac{A}{2\gamma\omega_0} \end{aligned} \quad (5.29c)$$

$$\sin(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} 2\gamma\omega_0 a &= 0 \\ \rightarrow a &= 0 \end{aligned} \quad (5.29d)$$

$$x_p(t) \stackrel{(5.29a)}{\stackrel{(5.29c)}{\stackrel{(5.29d)}}{=} \frac{A}{2\gamma\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (5.29e)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also:

$$x_a(t) \stackrel{(5.28)}{\stackrel{(5.29e)}}{=} e^{-\gamma t} (a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t}) + \frac{A}{2\gamma\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (5.29f)$$

d) Integrationskonstanten

Die Lösungen (5.22) bzw. (5.23) einer DGL n -ter Ordnung enthalten N Integrationskonstanten c_i . Diese werden festgelegt durch N Bedingungen. Das führt uns auf das *Anfangswertproblem*:

$$y(0) = A_1, y'(0) = A_2, \dots, y^{(N-1)}(0) = A_{N-1}$$

oder das *Randwertproblem*:

$$y(0) = A_1, y'(x_1) = A_2, \dots$$

e) Zusammenfassung

Lösungsschema:

(1.) Homogene DGL lösen:

$e^{\lambda x}$ funktioniert immer — aber nur im *homogenen* Fall und nur für *lineare* DGL mit *konstanten* Koeffizienten.

(2.) Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL bestimmen:

Siehe Unterunterabschnitt b)

(3.) Die allgemeine Lösung der DGL ergibt sich durch:

$$y_a(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

(4.) Anfangs- oder Randbedingungen berücksichtigen.

5.5 Greensche Funktion

5.5.1 Allgemeine Betrachtung

Wir betrachten eine inhomogene, lineare DGL:

$$\sum_{i=0}^N a_i y^{(i)}(x) = b(x) \tag{5.19}$$

von der die Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL bekannt sei.

Das folgende Verfahren dient dazu, die Lösung von (5.19) zu finden, die mit einem Satz gewählter Anfangs- oder Randbedingungen verträglich ist.

Wir suchen dazu eine Funktion $G(x, z)$, sodass wir die Lösung berechnen können als

$$y(x) = \int_a^b G(x, z) b(z) dz, \tag{5.30}$$